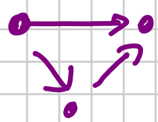
2013-10-24-Manschot

Invariants des carquois et mutations

Carquois

graph orienté



Q_0- ensemble des sommets

Q_1 - ensemble des flèches

$s : Q_1 \to Q_0$ source

$b : Q_1 \to Q_0$ but

Representation

$F = (\{V_i\}, \{f_a\})$

- associer à chaque $i \in Q_0$ un espace v. complexe $V_i \simeq \mathbb{C}^{d_i}$
- associer à chaque flèche $a \in Q_1$

$$f_a : V_{s(a)} \longrightarrow V_{b(a)}$$

"vecteur de dimension"

$$\vec{d} = (d_1, \dots, d_{|Q_0|})$$

Sous-representation

Une representation

$F' = (\{W_i\}, \{g_a\})$ est une sous rep de F si

$$W_i \subseteq V_i \quad \text{pour } \forall i \in Q_0$$

et la restriction f_a sur $W_{s(a)}$ est égale à g_a

<u>Exemples:</u>

$\overset{0}{①} \xrightarrow{0} \overset{0}{②}$ $\quad d=(0,0)$ $\quad F_0$

$\underset{1}{\overset{\mathbb{C}}{①}} \xrightarrow{0} \underset{2}{\overset{0}{②}}$ $\quad d=(1,0)$ $\quad F_1$

$\overset{0}{①} \xrightarrow{0} \overset{\mathbb{C}}{②}$ $\quad d=(0,1)$ $\quad F_2$

$\overset{\mathbb{C}}{①} \xrightarrow{0} \overset{\mathbb{C}}{②}$ $\quad d=(1,1)$ $\quad F_3$

$\overset{\mathbb{C}}{①} \xrightarrow{z} \overset{\mathbb{C}}{②}$ $\quad d=(1,1)$ $\quad F_4$

multiplication par $z \in \mathbb{C}^*$

$F_3 = F_1 \oplus F_2$

$F_1 \subset F_3$ $\qquad$ Sous-repns

$F_2 \subset F_3$

$F_2 \subset F_4$

$F_1 = F_4 / F_2$ - rép. quotient.

<u>Stabilité</u>

<u>2 possibilités:</u>

① Paramètres de stab.

$$\vec{\theta} = (\theta_1, \dots \theta_{|Q_0|}) \in \mathbb{R}^{|Q_0|}$$

pente:

$$\mu(F, \vec{\theta}) = \frac{\vec{\theta} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|}$$

où $|\vec{d}| = \sum_{i=1}^{|Q_0|} d_i$

Une repr. F est stable par rapport à $\vec{\theta}$ ssi

pour $\forall F' \subset F$ $(F' \neq 0)$

$$\mu(F', \vec{\theta}) < \mu(F, \vec{\theta})$$

semi-stable ssi $\leq$

2 $\vec{Z} = (Z_1, \ldots Z_{|Q_0|}) \in \mathcal{H}^{|Q_0|}$

où $\mathcal{H} = \{ z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im} z > 0 \}$

charge centrale:

$Z(F) = \vec{Z} \cdot \vec{d} \in \mathcal{H}$

une repr. F est stable par rapport à $\vec{Z}$ ssi pour $\forall F' \subset F$

$$\arg(Z(F')) < \arg(Z(F))$$

Le lien entre 1 et 2:

$$\theta_i = \operatorname{Im}\left(\frac{Z_i}{Z(M)}\right)$$

M une repr. t.q. $\vec{d}(M)$ est t.q. $\sum \theta_i \, d_i(M) = 0$

Exemples

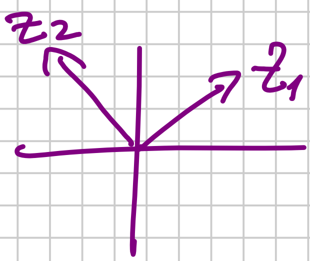
$\theta_1 < \theta_2$ $\qquad$ F_0, F_1, F_2 - stables

$\mu(F_3) = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2} < \theta_2$ donc

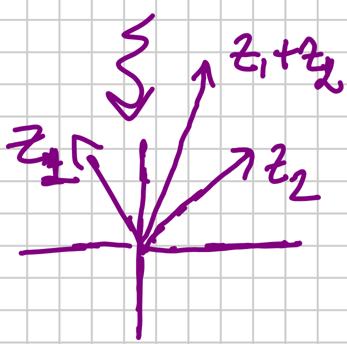
F_3 n'est pas stable.

$\theta_1 > \theta_2$ $\qquad$ F_0, F_1, F_2, F_4 non-stable

Passage de $\theta_1 < \theta_2$ à $\theta_1 > \theta_2$ est un exemple de wall crossing.



F_1, F_2



F_1, F_2, F_4

$z_1 \quad z_2 \quad z_1 + z_2$

charge centrale de repn.

En général il n'y a pas de correspondance biunivoque entre les charges et representations particulières

Espace de modules de repns

$M(\vec{d}, \vec{\theta})$: ensemble des classes isomorphes de reps semi-stables avec vec. de dim $\vec{d}$ et paramètres de stabilité $\vec{\theta}$

Si semi-stables implique stable

$M(\vec{d},\vec{\theta})$ = variété projective lisse

alors $\vec{d}$ est primitive, c. à .d. il n'y a pas de $n>1$ divisant $\vec{d}$.

<u>Automorphismes</u>

<u>Exemple</u>

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{d_3} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbb{C}^{d_2} \circlearrowleft GL(d_2) \\ & \mathbb{C}^{d_1} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$G_d = \prod_{i=1}^{|Q_0|} GL(d_i)$$

$g \in G_d$ $\quad g \cdot f_a = (g_{t(a)} f_a \, g_{s(a)}^{-1})$

Diagonale:

$(g_{t(a)}, g_{s(a)}) = (t \cdot \mathbb{1}, t\mathbb{1})$, $t \in \mathbb{C}^*$

L'espace de modules est alors:

Espace d'applications / action de G_d

Ex. $\theta_1 > \theta_2$

1) $\overset{1}{\bullet} \xrightarrow{z} \overset{1}{\bullet}$ $\qquad z \in \mathbb{C}^*$

$$M((1,1), \vec{\theta}) = \frac{\mathbb{C}^*}{\mathbb{C}^*} = \{1\}$$

2) $\bullet \overset{\varkappa}{\rightrightarrows} \bullet$

$$M((1,1), \vec{\theta}) = \mathbb{C}^{\varkappa} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^* = \mathbb{P}^{\varkappa - 1}$$

Invariants topologiques

Soit M une variété complexe. On défini les notions suivantes (cadre générale)

$$h^{pq}(M) = \dim H^{p,q}(M, \mathbb{C})$$

Charact. d'Euler:

$$\chi(M) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} h^{p,q}(M)$$

Polynôme de Poincaré:

$$p(M,y) = \sum_{p,q} y^{p+q} h^{p,q}(M)$$

Polynôme de Dolbeault

$$p(M,y,t) = \sum y^{p+q} t^{p-q} h^{p,q}(M)$$

Ici pour un espace de

module on définit
(espace de module est lisse, compacte)

Les invariants de Donaldson-Thomas :

numérique :

$$\Omega(\vec{d},\vec{\theta}) = (-1)^{\dim M(\vec{d},\vec{\theta})}\chi(M(\vec{d},\vec{\theta}))$$

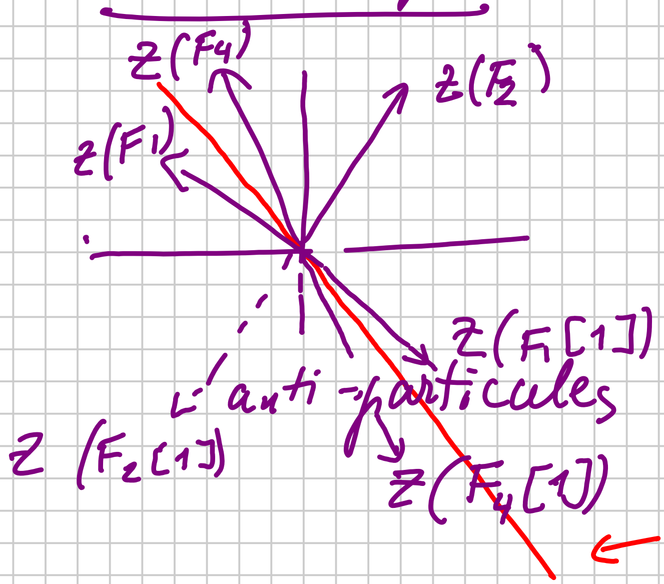
motivique :

$$\Omega(\vec{d},\vec{\theta},y) = y^{-\dim_{\mathbb{C}} M(\vec{d},\vec{\theta})} P(M(\vec{d},\vec{\theta}),y)$$

En physique, cet inv. calcul un nombre de l'états quantiques

Mutation dans ce contexte depend des paramètres de stabilité.

Un exemple: $\theta_1 > \theta_2$



catégorie de representation de carquoi.

le demi-plan définie quelles particules sont

$$Z(F) = d\cdot\vec{Z}$$

Charge centrale = forme linéaire sur le gp. de Grothendick de la catégorie dérivée de repn. de carquoi.

Mutation de carquoi est la même +

$\varepsilon = 1$ mut. à droite

$\varepsilon = -1$ mut à gauche

γ_{ij} = # fleches de i à j

mutation au sommet k

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} -\gamma_{ij} & \text{si } i=k \\ \gamma_{ij} + \max(0, \gamma_{ik}\gamma_{kj})\,\operatorname{sign}(\gamma_{kj}) & \end{cases}$$

$$Z_i' = \begin{cases} -Z_i & \text{si } i=k \\ Z_i + \max(0, \varepsilon\gamma_{ik})\, Z_k & \end{cases}$$

$$d_i' = \begin{cases} -d_k + \sum_{j\neq k} d_j \max(0, \varepsilon\gamma_{jk}) & \text{si } i=k \\ d_i & \text{si } i\neq k \end{cases}$$

$$\Omega(\vec{d}, \vec{Z}, Q) = \Omega(\vec{d}', \vec{Z}', Q)$$